



Marcelo Amorim Dias de Araújo

Variedades Digitais Como Grafos

Recife

2018

Marcelo Amorim Dias de Araújo

Variedades Digitais Como Grafos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Curso de Bacharelado em Ciências da Computação da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Departamento de Estatística e Informática

Curso de Bacharelado em Ciências da Computação

Orientador: Wilson Rosa de Oliveira Júnior

Recife

2018



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO (UFRPE)
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

<http://www.bcc.ufrpe.br>

FICHA DE APROVAÇÃO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Trabalho defendido por Marcelo Amorim Dias de Araújo às 10 horas do dia 08 de fevereiro de 2018, no Auditório do CEAGRI-02 – Sala 07, como requisito para conclusão do curso de Bacharelado em Ciência da Computação da Universidade Federal Rural de Pernambuco, intitulado **Variedades Digitais como Grafos**, orientado por Wilson Rosa de Oliveira Júnior e aprovado pela seguinte banca examinadora:

Wilson Rosa de Oliveira Júnior
DEINFO/UFRPE

Maigan Stefanne da Silva Alcântara
DEINFO/UFRPE

Marcella Feitosa dos Santos
CODAI/UFRPE

À todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos à mim, fazendo esta vida valer cada vez mais a pena.

Agradecimentos

Às minhas tias, Nely e Vânia, minha avó Edilza e minha irmã Caroline, lhes sou muito grato por todos esses anos de dedicação e cuidado. Não há como dissociar nenhum momento da minha trajetória sem considerar as pessoas constantes em minha vida, minha família. Por isso, lhes agradeço.

Ao professor Wilson, pela paciência durante esses anos e por ter dedicado seu tempo me ensinando. Sem ele, minha trajetória na graduação não seria tão proveitosa.

À Marcella Feitosa, orientanda do professor Wilson, por ter me ajudado à compreender a teoria que motivou as implementações analisadas neste projeto.

Aos demais professores e amigos, que estiveram comigo nessa trajetória e que estão sempre presentes em meus pensamentos.

*“A persistência é o caminho do êxito.”
(Charles Chaplin)*

Resumo

A topologia digital desempenha um papel importante na análise de imagens digitalizadas provenientes da Computação Gráfica, bem como em muitas áreas da ciência, incluindo Neurociência, Imagiologia Médica, Inspeção Industrial, Geociências, Dinâmica de Fluidos e Gravitação Quântica. Neste trabalho pretende-se introduzir os conceitos da topologia digital com o objetivo de contribuir com a área de Computabilidade e Modelos de Computação nos assuntos de Teoria dos Grafos e Topologia de Variedades. Utilizando a abordagem de Evako, foi dado início ao desenvolvimento de uma ferramenta, implementando-se em linguagem computacional os algoritmos de análise de n -variedades digitais. Para isto, embasados na teoria de grafos contráteis, pudemos introduzir o conceito de esferas e variedades digitais a fim de trabalharmos com duas homotopias especiais entre essas variedades, a saber, R -transformação e compressão. As implementações foram testadas utilizando-se estruturas em grafo representando o espaço topológico. Uma das vantagens da implementação, pode ser percebida no teste de contratibilidade. Onde, devido ao poder de processamento computacional, podemos encontrar um caminho para verificar se um grafo é contrátil ou não, de acordo com o proposto por Evako. Por ser um plano com aspectos teóricos e práticos em uma área multidisciplinar, os resultados obtidos são referentes a cursos e leituras de artigos e livros. As operações implementadas nesse projeto podem vir a constituir uma ferramenta de análise de variedades. Acreditamos que, em trabalhos futuros, será possível chegar à implementação de um algoritmo que classifica as n -variedades digitais.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos, Teoria da Computação, Variedade Digital, Topologia.

Abstract

Digital topology plays an important role in analyzing digital images from computer graphics, as well as, in many areas of science, including Neuroscience, Medical Imaging, Industrial Inspection, Geosciences, Fluid Dynamics and Quantum Gravitation. In this work we intend to introduce the concepts of Digital Topology with the aim of contributing to the area of Computability and Computer Models in the subjects of Graph Theory and Manifold Topology. Using the Evako approach, we gave start to the development of a tool, implementing in programming language algorithms of analysis of n -digital manifolds. For this, based on the theory of contractile graphs, we were able to introduce the concept of spheres and digital manifolds in order to work with two special homotopias between these manifolds, namely R -transformation and compression. The implementations were tested using graph structures representing the topological space. One of the advantages of the implementation can be seen in the contractility test. Where, due to the power of computational processing, we can find a way to verify whether a graph is contractile or not, according to what is proposed by Evako. Because it is a plan with theoretical and practical aspects in a multidisciplinary area, the results obtained refer to courses and readings of articles and books. The operations implemented in this project may constitute a manifold analysis tool. We believe that, in future work, it will be possible to implement an algorithm that classifies the n -digital manifolds.

Keywords: Graph Theory, Computer Theory, Digital Manifold, Topology.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Alguns exemplos de grafos contráteis	13
Figura 2 – 0-esfera	14
Figura 3 – Exemplo de n -esferas minimais	15
Figura 4 – No grafo G , os pontos pintados de vermelho representam a fronteira a partir do $v(1)$. No grafo H , os pontos em vermelho representam o interior a partir do $v(1)$	16
Figura 5 – Operação de R -Transformação	17
Figura 6 – Exemplos de compressão em um n -disco digital	17
Figura 7 – Soma de Grafo trivial com uma 1-esfera	27
Figura 8 – Soma de Grafo estrela com uma 0-esfera	27
Figura 8 – Investigação em $v(0)$	31
Figura 8 – Investigação em $v(1)$	34
Figura 8 – Investigação nos demais vértices	37
Figura 9 – Operações de R -Transformação. Grafo H é o resultado de uma R -Transformação no grafo G . Grafo J é o resultado de uma R -transformação no Grafo I	38
Figura 10 – Compressão	39
Figura 11 – Ilustrações do processo de extração de grafos de uma imagem. Abaixo, temos o grafo resultante desse procedimento.	40
Figura 12 – Grafo de adjacências	41

Lista de abreviaturas e siglas

E_n	Espaço Euclidiano
\oplus	Operador de Soma
\subseteq	Subconjunto
$O(v)$	Vizinhança do vértice v
$=$	Operador Igual
S_n	n -esfera digital
\cap	Intersecção de Conjuntos
$>$	Operador Maior
$-$	Operador Diferença
D	Disco
$IntD$	Interior de D
∂D	Fronteira de D
\cup	União de Conjuntos
\times	Operador Multiplicação
\leq	Operador Menor que
$ G $	Número de vértices do grafo G
$com(G)$	Complexidade do grafo G
$dim(G)$	Dimensão do grafo G

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	ESPAÇOS DIGITAIS E TRANSFORMAÇÕES CONTRÁTEIS	12
3	CLASSIFICAÇÃO DE N-VARIEDADES DIGITAIS	19
3.0.1	Algoritmo para Classificação de n -Variedades	19
4	PROBLEMA DE PESQUISA	21
5	JUSTIFICATIVA	22
6	OBJETIVOS	24
6.0.1	Objetivos Gerais	24
6.0.2	Objetivos Específicos	24
7	METODOLOGIA	25
7.1	Metodologia e Etapas do Projeto	25
7.1.1	Resultados esperados	25
8	RESULTADOS	26
8.1	Resultados e Análise	26
8.1.1	Soma	26
8.1.2	Teste de Contratibilidade	28
8.1.3	R -Transformação	37
8.1.4	Compressão	38
8.1.5	Discretização de Objetos Digitais	40
8.1.6	Software Graph Manifold	41
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	47
	REFERÊNCIAS	48

1 Introdução

Por “discretização” de um modelo espacial é comum imaginar que em qualquer vizinhança limitada, ou região (limitada), há apenas um número finito de elementos. Assim, tal representação deve ser, no mínimo, localmente finito. Ao propor o estudo de modelos espaciais discretos, estamos admitindo a possibilidade de que o espaço é na verdade (localmente) finito (SMYTH; WEBSTER, 2007; IVASHCHENKO, 1994a).

No processamento de imagens digitais, os objetos (ou suas regiões) devem ser representados discretamente. É possível, com isso, tentar desenvolver uma topologia e uma geometria que possa lidar com essas representações discretas diretamente, sem a necessidade de incorporá-las na sua formação tradicional contínua. A principal abordagem para tais problemas utiliza estruturas que são, na verdade, espaços de tolerância, em que a relação binária é, geralmente, a adjacência de pixels, e por esse motivo torna-se conveniente a utilização da estrutura dos grafos (SMYTH; WEBSTER, 2007).

A ideia do espaço de tolerância (desenvolvida por Poincaré em 1905) é que qualquer perceptivo “contínuo” (em oposição a Matemática ou a Física) deve ser finito e, além disso, pode ser estruturado por meio de uma relação binária, desenvolvido com o auxílio de uma topologia rudimentar. Poincaré propôs uma definição de dimensão para esses espaços, que não foi tão bem sucedida. Anos depois, Zeeman e seu aluno Poston o fizeram com técnicas mais completas (SMYTH; WEBSTER, 2007).

O embasamento teórico deste trabalho se baseia na obra de Evako (EVAKO, 2015; EVAKO, 2005; EVAKO, 2011; EVAKO, 2014) que, se utiliza da Teoria dos Grafos para introduzir conceitos e propriedades do que aqui é chamado de *Topologia Digital*. Características de objetos digitais discretizados são investigados a partir de uma topologia que permita o estudo de propriedades inerentes à essas estruturas, em duas ou mais dimensões. Um dos principais atributos que se encontra subjacente à natureza de tais objetos, se refere à equivalência dessas estruturas. Duas estruturas são equivalentes topologicamente se uma pode ser obtida da outra através de transformações contráteis. Essas estruturas, para este estudo, são grafos representativos das relações de adjacência que caracterizam o modelo investigado. O que aqui chamamos de transformações contráteis são inserções e deleções de vértices e arestas (IVASHCHENKO, 1994b; IVASHCHENKO, 1994a; CHEN; YAU; YEH, 2001; EVAKO, 2015; EVAKO, 2011). Ivaschenko, demonstra que essas operações preservam as chamadas características de Euler e a homologia no grafo. Tais características não são capazes de fornecer algum tipo de classificação da superfície em estudo, no entanto, podem

nos dar uma informação igualmente importante. Grafos com a mesma característica de Euler são equivalentes e, assim sendo, tais características também são úteis para saber quando não há equivalência entre estruturas (IVASHCHENKO, 1994a; IVASHCHENKO, 1994b; IVASHCHENKO; YEH, 1994).

Nas próximas sessões vamos abordar as principais definições, que servem como base para a análise de objetos digitais da topologia proposta por Evako. Na sessão de análise, será introduzido os resultados obtidos a partir da implementação, em linguagem programacional, de algoritmos que traduzem as definições propostas pelo autor. No decorrer do texto, são feitas referências à Ivashchenko e Evako, por motivos de tradução do idioma russo para o português, ambas formas se referem à mesma pessoa.

2 Espaços Digitais e Transformações Contráteis

Muito se tem estudado acerca das propriedades das transformações contráteis. Sabemos que Ivanshchenko (IVASHCHENKO, 1994a) provou que tais transformações não modificam a homologia de grupos em grafos. Homologia aqui deve ser entendida como na matemática.

Transformações contráteis consistem em procedimentos de colar e excluir, vértices e arestas de grafos. Essas manipulações, são baseadas em operações contráteis de espaços moleculares. Um espaço molecular representa uma família de cubos unitários com coordenadas associadas em um espaço euclidiano E_n (IVASHCHENKO, 1994b; IVASHCHENKO; YEH, 1994; IVASHCHENKO, 1994a). Assim sendo, esse espaço pode representar um conjunto de dados, coordenadas ou pixels de uma imagem (KOMURAVELLI; SINHA; BISHNU, 2009). Um espaço digital é representado por um grafo simples não direcionado.

Aqui, estamos interessados em um tipo especial de estrutura que estamos chamando de n -variedade Digital. Veremos que tais variedades, são equipadas com propriedades que permitem a manipulação de sua estrutura a partir de transformações contráteis.

Conectividade, adjacências e dimensionalidade são conceitos intrínsecos à teoria das variedades (LEE, 2011; LEE, 2012). Um espaço digital G é um grafo não direcionado representado por um conjunto de vértices e arestas. Uma borda é um subgrafo $O(v)$ contendo todos os vértices adjacentes à v . Uma bola é um subgrafo formado por um vértice v e seus pontos adjacentes. Quando falamos subgrafo, estamos nos referindo ao subgrafo induzido do grafo em análise (EVAKO, 2015). A seguir veremos como o autor define formalmente alguns conceitos.

Definição 1. *Soma \oplus : A soma de dois grafos, $G \oplus H$ é o grafo que contém G, H e arestas unindo cada ponto de G à cada ponto de H .*

Na análise de resultados, essa operação será retomada com maior cuidado.

Definição 2. *Bordas e Bola: O subgrafo $O(v) \subseteq G$ contendo todos os pontos adjacentes à v , exceto o próprio v , é chamado a borda ou vizinhança do ponto em G . O subgrafo $U(v) = v \oplus O(v)$ é chamada a bola de v .*

Definição 3. *Grafos Contráteis: Um grafo G é chamado contrátil, se ele pode ser convertido para o grafo trivial por exclusão sequencial de pontos simples. Um ponto v de*

um grafo G é dito ser simples se sua borda $O(v)$ é um grafo contrátil. Uma aresta (vu) de um grafo G é dita simples, se a interseção das bordas, $O(vu) = O(v) \cap O(u)$, é um grafo contrátil. O grafo trivial possui apenas um vértice.

Para ilustrar essa definição, temos a seguir uma lista de grafos contráteis.



Figura 1 – Alguns exemplos de grafos contráteis

Cada um desses grafos com dois ou mais pontos, podem ser obtidos a partir de aplicações indutivas da operação de soma no grafo trivial (IVASHCHENKO, 1994b).

Essas definições estão intimamente relacionadas com as operações contráteis que serão vistas mais adiante. A investigação de contratibilidade de um grafo parte de um vértice qualquer e termina ao ser encontrado um caminho a contratibilidade. Se dois grafos são contráteis estes são homotopicamente equivalentes (EVAKO, 2015).

Definição 4. *0-Esfera:* Uma 0-esfera digital é o grafo desconexo $S_0(a, b)$, com apenas dois pontos a e b .



Figura 2 – 0-esfera

Definição 5. *n -Esfera:* Um espaço digital conexo M é chamado de n -esfera digital, $n > 0$, se para qualquer ponto $v \in M$, a borda $O(v)$ é uma $(n - 1)$ -esfera e o espaço $M - v$ é um grafo contrátil. O espaço $D = M - v$ é chamado de n -disco digital.

As figuras que seguem são representações gráficas do conceito de uma n -esfera.

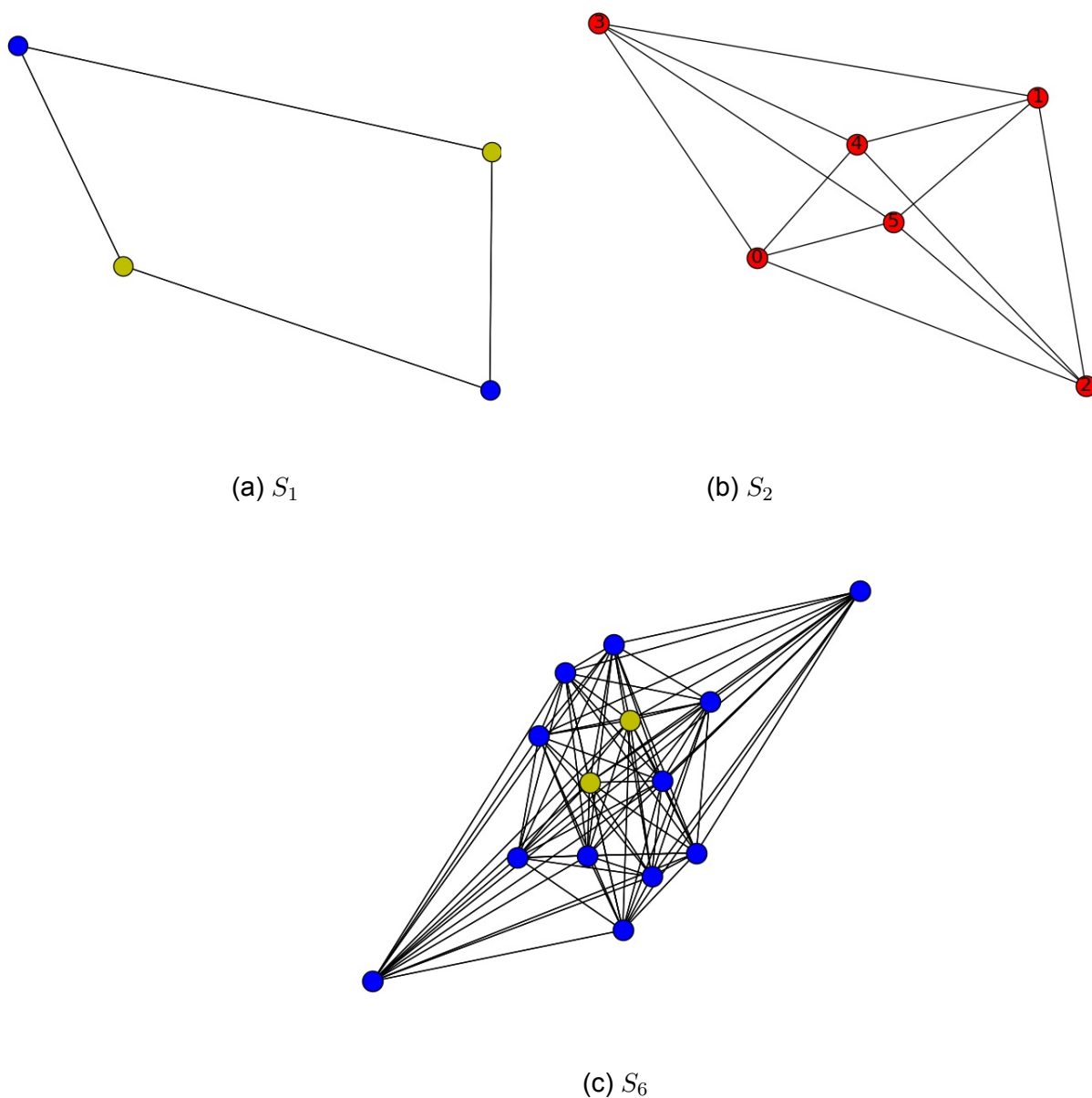


Figura 3 – Exemplo de n -esferas minimais

Definição 6. n -Disco: Seja M a n -esfera digital, $n > 0$, e v um ponto pertencente a M . O espaço $D = M - v$ é chamado de n -disco digital.

Em vista dessa definição, no n -disco digital se um ponto v , pertence à $IntD$ então, $O(v)$ é uma $(n - 1)$ -esfera. Caso v pertença à ∂D então $O(v)$ é um $(n - 1)$ -disco.

Evako(2014) define um n -disco digital D como sendo a união dos espaços $IntD$ e ∂D .

As figuras a seguir, servem para ilustrar tais conceitos.

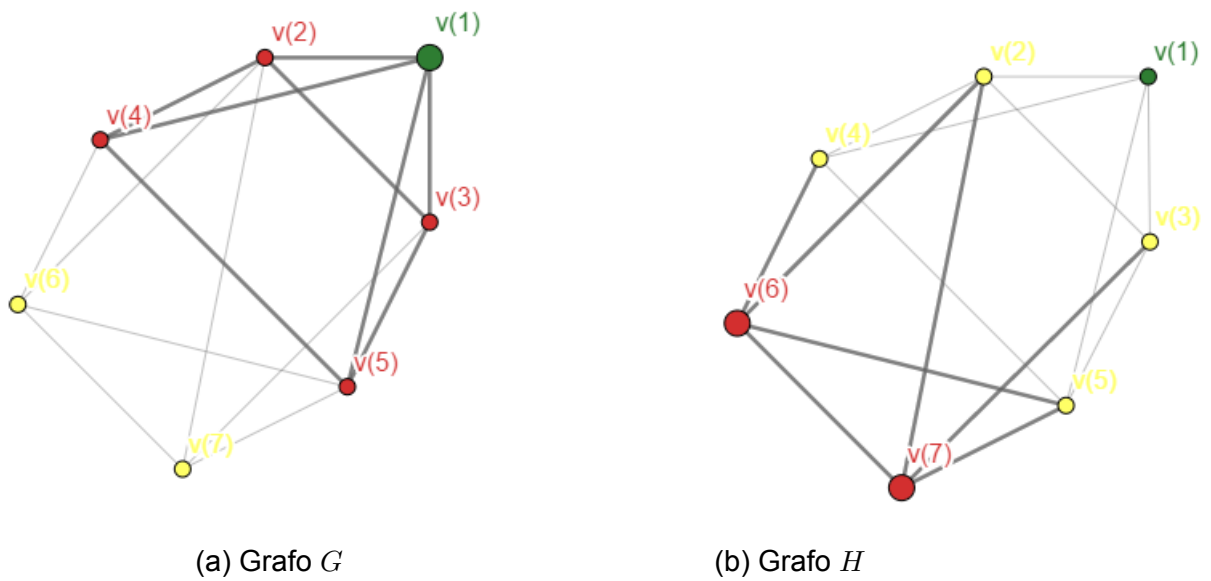


Figura 4 – No grafo G , os pontos pintados de vermelho representam a fronteira a partir do $v(1)$. No grafo H , os pontos em vermelho representam o interior a partir do $v(1)$.

Tomando como referência um ponto do grafo, os vértices de fronteira são determinados pelo subgrafo induzido pelo $O(v)$ desse ponto. O $IntD$ é formado pelos demais vértices ligados à ∂D .

Agora podemos seguir com o conceito de variedades digitais do Evako.

Definição 7. *n -Variedade:* Um espaço conexo M é chamado de n -variedade, $n > 1$, se a borda $O(v)$ de qualquer ponto v de M é uma $(n - 1)$ -esfera.

Neste estudo estamos lidando apenas com n -variedades conexas para $n > 0$, segue das definições acima que para qualquer ponto v pertencente à uma n -variedade M , se o espaço $M - v$ não for contrátil M não poderá ser uma n -Esfera (EVAKO, 2015).

As operações de R -transformação e Compressão definidas formalmente a seguir, descrevem respectivamente operações de adição de vértices, e troca de arestas por um vértice respectivamente.

Definição 8. *R -Transformação:* Sejam M uma n -variedade, v e u vértices adjacentes em M . Cole o ponto x à M de modo que $O(x) = u \oplus (v \oplus O(uv))$, e delete a aresta (uv) . Esta dupla de transformações contráteis é chamada de R -transformação, denotada por $R : M \rightarrow N$. O espaço obtido N é denotado por $N = RM = (M \cup \{x\}) - (uv)$.

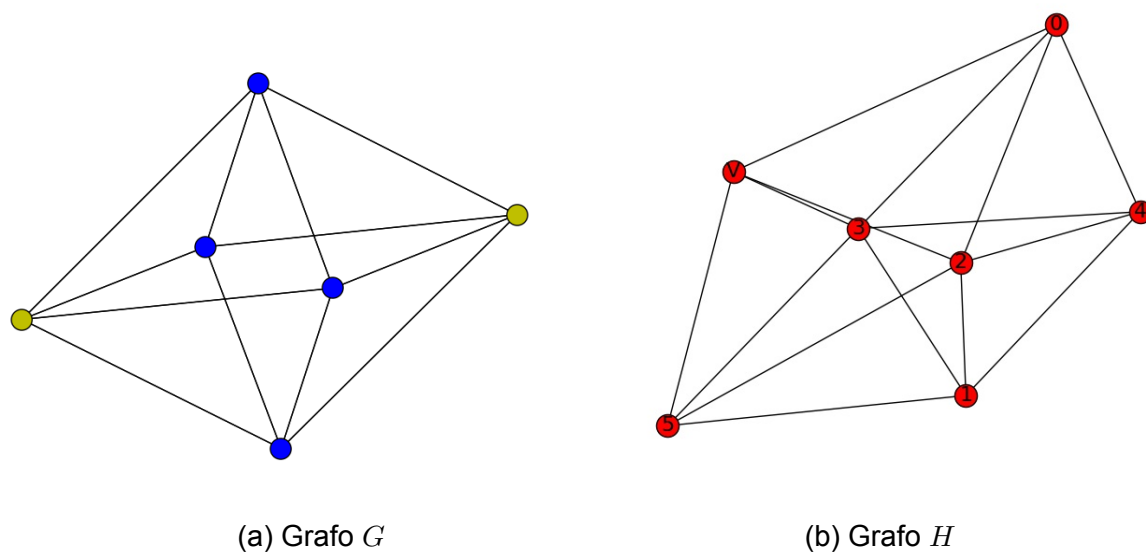


Figura 5 – Operação de R -Transformação

Na figura, uma aresta foi substituída pelo vértice v . Na sessão de análise de resultados essa operação será retomada com mais exemplos.

Definição 9. *Compressão:* Seja $D = \partial \cup IntD$ é um n -disco de uma n -variedade M . A contração de D é a substituição de todos os pontos pertencentes à $IntD$ por um único ponto z tal que, z é adjacente a todos os pontos pertencentes à ∂D .

Vamos ilustrar essa definição com o exemplo que se segue.

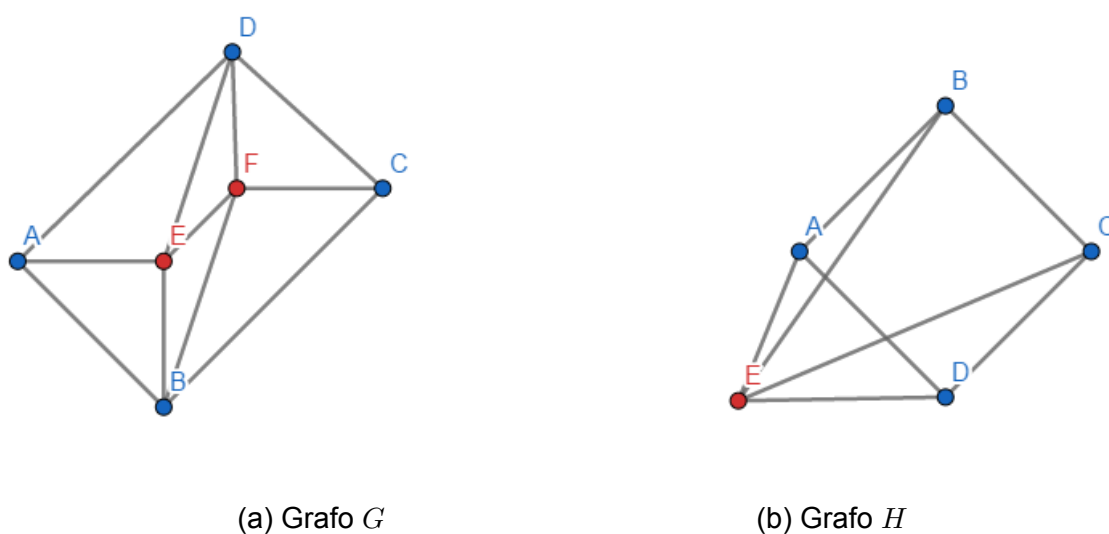


Figura 6 – Exemplos de compressão em um n -disco digital

Na figura, os pontos em azul são o $O(v)$ do vértice que deu origem ao n -disco. No grafo G , os pontos em vermelho, pertencem ao interior. Sua compressão resultaria

no grafo H . O grafo H já está em sua forma comprimida, portanto a operação de compressão neste grafo não resultaria em transformações.

Tais operações possuem como característica fundamental, a preservação de propriedades topológicas da estrutura (EVAKO, 2015; EVAKO, 2011; EVAKO, 2014; IVASHCHENKO, 1994b; IVASHCHENKO; YEH, 1994; LEE, 2011).

3 Classificação de n -Variedades Digitais

A classificação de variedades é um problema antigo ainda aberto a discussões. As formas de classificação variam entre categorias diferentes. De maneira geral, essa forma de categorização de objetos é dada em vista de isomorfismos. No caso das n -variedades digitais, é reduzida à um conjunto de equivalências onde é possível a construção de sequências comprimidas M_1, M_2, \dots em que qualquer M dessa sequência, é homomorfo à pelo menos um desses objetos. A classificação de variedades n -dimensionais pode representar um problema que envolve custo computacional, dado a complexidade do espaço topológico em análise. Evako (2015), define essa complexidade como veremos a seguir.

Definição 10. *Seja M uma n -variedade digital com número de pontos $|M|$ e seja CM a compressão de M com número de ponto CM . A complexidade de M denotada por $com(M)$ é $|CM|$.*

Proposição 11. *Seja M uma n -variedade e $|M|$ seu conjunto de pontos, então:*

- Se $n = 1$, então $com(M) = 4$
- Se $n > 1$, então $2n + 2 \leq com(M) \leq |M|$

3.0.1 Algoritmo para Classificação de n -Variedades

Da proposição temos que para qualquer número positivo N existe um conjunto finito de n -variedades com N pontos e de dimensão $(dim) = n \leq \frac{N - 2}{2}$.

- Para um dado n e N , $2n + 2 \leq N$ encontre todas as n -variedades comprimidas com s pontos, tal que $2n + 2 \leq s \leq N$

Seja $B(n, N)$ o conjunto dessas n -variedades, temos que esse conjunto é finito.

- Seja M uma n -variedade com número de pontos $|M| = N + 1$. Encontramos duas situações. M está em sua forma comprimida e nesse caso é adicionado ao conjunto $B(n, N)$, ou M possui número de pontos maior que CM sendo homeomorfo à algum M em $B(n, N)$.

Computacionalmente pode ser mais eficiente analisar o espaço $M - v$ do que a estrutura comprimida de M . Uma forma de se prosseguir com essa análise pode ser vista a seguir:

- Obter de $M - v$ o espaço M , adicionando sequencialmente todas as arestas simples.
- Obter de M_1 o espaço M_2 removendo todos os pontos simples.
- Repetir os passos 1 e 2 até que não se possa adicionar arestas e remover pontos simples.

Por fim, temos que a classificação de variedades digitais pode ser obtida em vista da análise do número de pontos de sua versão comprimida, da compressão do disco da estrutura, $C(M - v)$ ou a partir da compressão da estrutura M .

4 Problema de Pesquisa

Uma das principais preocupações de pesquisadores da área se encontra em não apenas propor um método mas sim comprovar sua eficiência, visto que técnicas de análise de superfícies contínuas apresentam um considerável custo computacional.

Tendo isso em vista, é possível obter um modelo discretizado que possa representar superfícies e objetos contínuos em um espaço Euclidiano n -dimensional? Utilizando a abordagem de Evako ([EVAKO, 2015](#); [EVAKO, 2011](#); [EVAKO, 2014](#)), temos por objetivo introduzir o conceito das chamadas n -variedades digitais.

5 Justificativa

Assim como Evako, outros pesquisadores têm se preocupado em investigar propriedades em espaços topológicos. Embora a partir de motivações distintas, cada uma dessas pesquisas realizadas contribui bastante com o estudo teórico na área e com a abordagem seguida neste estudo.

Um projeto diretamente relacionado com este estudo, começou em 2009 e foi desenvolvido por Oliver Knill. O principal objetivo do autor é entender a relação de grafos à nível geométrico e investigar estruturas discretas conhecidas na geometria diferencial. Em seus trabalhos (KNILL, 2014a; KNILL, 2014b), Knill discute a relação de regiões conexas com as Características de Euler, um invariante topológico. Para regiões conexas cuja fronteira é uma curva simples Knill demonstra que o Teorema de Hopf pode ser aplicado. Ainda de acordo com Knill, Hopf relaciona a quantidade da geometria diferencial, a curvatura, com o invariante topológico. Em estudos posteriores, o mesmo autor fala sobre um conceito importante, o homeomorfismo de grafos. Essa noção, é baseada nos conceitos de dimensão e homotopia. A dimensão de sub-bases, co-homologia, e Características de Euler são preservadas em estruturas homeomorfas (KNILL, 2014b). Conectividade e homotopia devem ser entendidas aqui da mesma forma como na topologia clássica.

Homotopia de estruturas não é um assunto recente. Outros autores já vêm investigando e desenvolvendo conceitos relacionados. Chen, Shing-Tung, e Yeong-Nan falam que a homotopia de grafos é útil para descrever propriedades topológicas de superfícies geométricas discretizadas e que esta, se relaciona com a homotopia de Graham, outra definição utilizada para caracterizar hipergrafos acíclicos. Demonstram que a homotopia de grupos, tanto quanto a homologia de grupos, são invariantes sob transformações. Além disso, argumentam que as Características de Euler, permanecem inalteradas sob transformações no grafo (CHEN; YAU; YEH, 2001). Embora para este projeto estejamos interessados em grafos não direcionados, vale a pena mencionar as pesquisas de Tsaour (TSAUR; SMYTH, 2013) que pesquisou a relação de homeomorfismos em digrafos contráteis. Muitos desses estudos são derivados do que Poston (POSTON, 1971) trouxe em sua tese de PHD .

Inspirados pelo trabalho de Evako sobre a dimensão de grafos, Smyth, Tsaour e Stewart desenvolveram uma definição análoga baseada em duas características distintas: O aspecto local, onde a dimensão de um grafo é obtida a partir de cada vértice e a dimensão do produto $G \times H$ é a dimensão (dim) de $G + dim(H)$, para dois grafos não vazios G e H (SMYTH; TSAUR; STEWART, 2010).

A Topologia Digital desempenha um papel importante na análise de imagens digitalizadas provenientes da computação gráfica, bem como em muitas áreas da ciência, incluindo neurociência, imagiologia médica, inspeção industrial, geociências, dinâmica de fluídos e gravitação quântica (EVAKO, 2015).

As operações que virão à ser implementadas nesse projeto podem vir à constituir uma ferramenta de análise de variedades. Uma das vantagens da implementação, pode ser percebida no teste de contratibilidade. Devido ao poder de processamento computacional é possível encontrar um caminho para checar se um grafo é contrátil ou não, de acordo com o proposto por Evako (EVAKO, 2015). Entendemos que o trabalho desenvolvido por esse teórico, pode ser traduzido em um modelo análise computacional eficiente.

Essa é uma área ainda pouco explorada, especialmente no nosso país. Acreditamos que o desenvolvimento e implementação de um modelo classificador de variedades, bem como o levantamento teórico realizado são importantes contribuições para o estudo da comunidade científica nos assuntos de topologia de variedades e teoria dos grafos.

6 Objetivos

6.0.1 Objetivos Gerais

O principal objetivo deste trabalho é fornecer uma introdução à conceitos e aplicações da Topologia Digital, tendo em vista a abordagem teórica da Teoria das Variedades Digitais em Grafos, elaborado por Evako. Para isso, vamos dar início à um ferramenta computacional implementando, em linguagem de programação, definições vistas neste estudo. Por fim, espera-se que as implementações desenvolvidas neste projeto possa, no futuro, constituir um recurso computacional que permita análise topológica de dados.

6.0.2 Objetivos Específicos

1. Introduzir conceitos de Topologia Digital utilizando ferramentas computacionais;
2. Implementar em linguagem programacional definições da teoria das variedades em grafos;
3. Relacionar a área de estudo com aplicações em Computação Gráfica e Processamento de Imagens;
4. Contribuir com as áreas de Topologia e Teoria dos Grafos;

7 Metodologia

7.1 Metodologia e Etapas do Projeto

A metodologia utilizada foi principalmente a análise funcional a partir da implementação dos conceitos de topologia das variedades referentes as áreas de Teoria dos Grafos e Computação Gráfica.

Esse projeto se deu início como uma pesquisa de iniciação científica (PIBIC). Em todos os testes, foram usados o módulo gerador de grafos do Networkx, biblioteca disponível para Python, que permite criar e manipular estruturas em grafos. A escolha da linguagem foi motivada pelo conjunto de bibliotecas disponível e familiaridade de uso.

Os grafos são representados por um objeto criado a partir de um conjunto de vértices e arestas. Dessa forma é possível, a partir de um vértice acessar seus vizinhos, como também adicionar e remover pontos da estrutura, seguindo sempre, o modelo conceitual que perpassa o estudo. Para a maior parte das imagens geradas, foi utilizado a biblioteca de visualização de dados Matplotlib. Os resultados são evidenciados a partir da comparação visual da estrutura antes e depois de ser aplicado o método escolhido.

7.1.1 Resultados esperados

1. Levantamento bibliográfico na área de Teoria das Variedades, tomando como referência os trabalhos de Evako ([EVAKO, 2015](#); [EVAKO, 2011](#); [EVAKO, 2014](#); [EVAKO, 2005](#)), com exposições em seminários das sessões vistas.
2. Dar início à um recurso computacional que permita compreender e visualizar as principais definições em variedades como grafos.
3. Analisar e introduzir conceitos de variedades digitais em grafo.

8 Resultados

8.1 Resultados e Análise

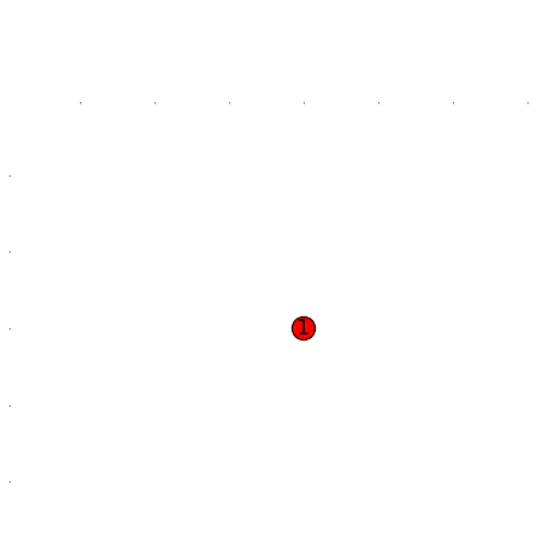
Até agora falamos sobre os conceitos que permitem a representação em grafos do que é chamado de variedade digital.

Sabemos que para determinarmos se uma dada estrutura é uma n -variedade, precisamos analisar, o subgrafo induzido a partir de cada um de seus pontos.

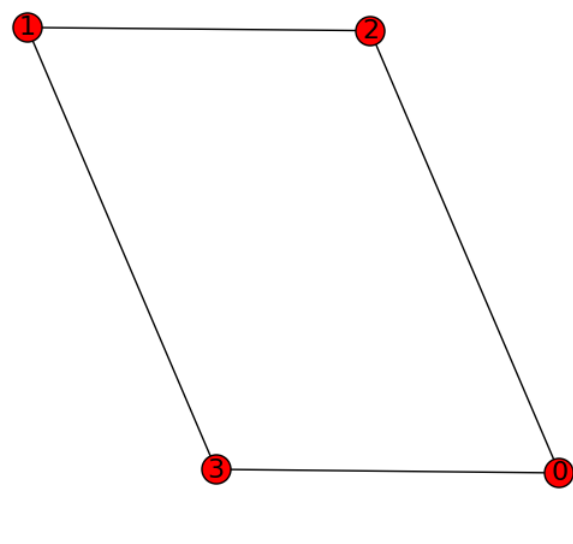
Nesta seção vamos analisar o resultado de cada uma das operações, necessárias para a análise das variedades digitais, começando pela operação de soma. Vamos ainda, dar especial atenção aos resultados obtidos a partir do método que testa se um grafo é contrátil. Visto essa, ser uma operação primordial para determinar se a estrutura é uma n -variedade. Além disso, vamos discutir mais adiante os primeiros passos e resultados obtidos da implementação de um método de discretização de imagens.

8.1.1 Soma

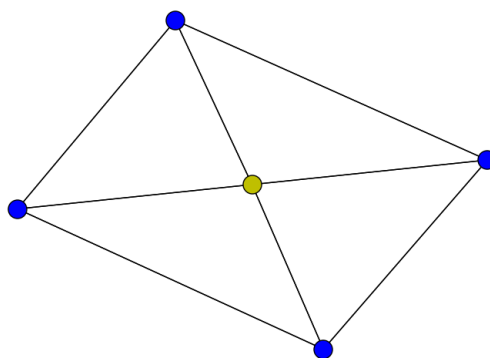
Como visto na Definição 1, essa operação relaciona pontos de uma estrutura à outra. A seguir, as imagens geradas da implementação dessa operação.



(a) Grafo G

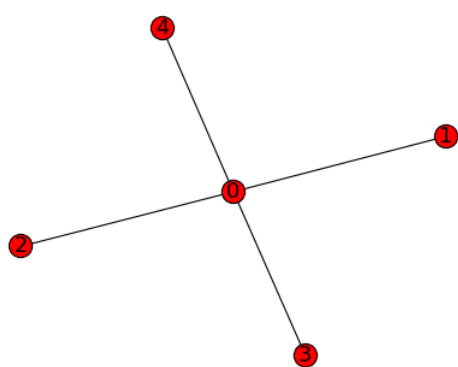


(b) Grafo H



(c) Grafo $G \oplus H$

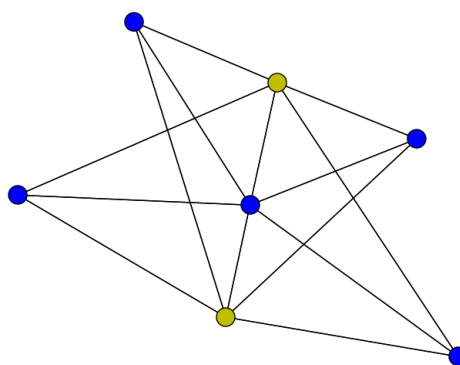
Figura 7 – Soma de Grafo trivial com uma 1-esfera



(a) Grafo I



(b) Grafo J



(c) Grafo $I \oplus J$

Figura 8 – Soma de Grafo estrela com uma 0-esfera

Nas figuras 4 e 5 acima, podemos ver o resultado dessa operação. Nos dois

casos, temos os grafos à serem somados e abaixo, a estrutura colorida indicando o resultado da operação.

8.1.2 Teste de Contratibilidade

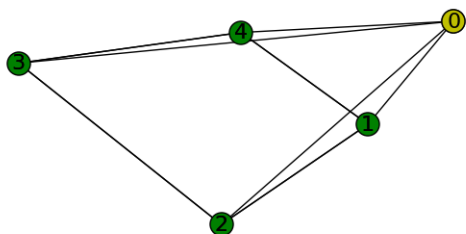
A representação em grafos da estrutura em análise permite a atribuição de rótulos à cada um de seus vértice. O método respeita essa atribuição e segue com a análise de vértices em ordem crescente.

O algoritmo que testa a contratibilidade de um grafo, segue os seguintes passos:

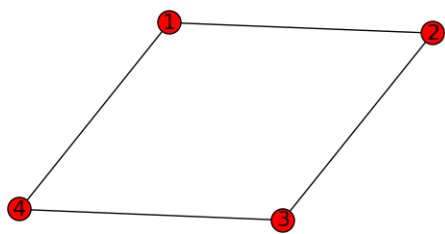
- Escolhe um vértice e começa a análise a partir do subgrafo induzido de sua vizinhança.
- Repete a operação anterior, até que não seja possível obter mais subgrafos dessa análise.
- Caso essa operação resulte em um subgrafo induzido com um vértice apenas, o vértice que iniciou a análise é removido (pois este, é considerado um ponto simples). Caso contrário, o algoritmo repetir os passos anteriores para os demais nós do grafo.

Nas imagens abaixo é possível observar a estrutura de entrada do algoritmo, bem como os subgrafos induzidos pela vizinhança de cada nó.

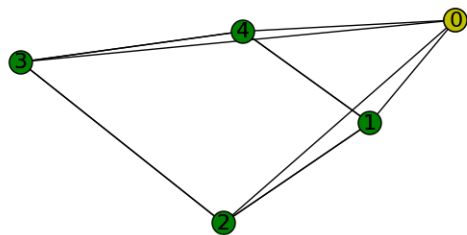
TESTE CONTRATIBILIDADE



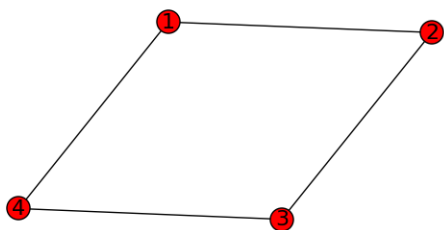
$O(0)$



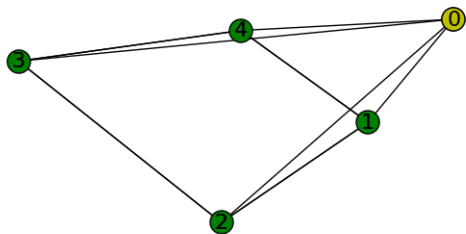
TESTE CONTRATIBILIDADE



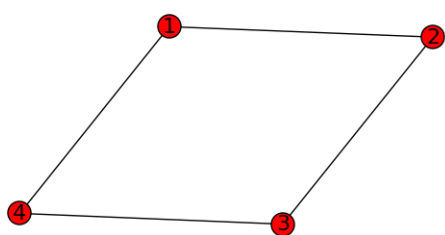
$O(0)$



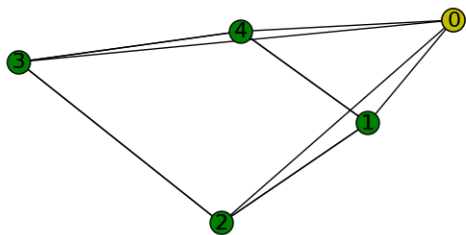
TESTE CONTRATIBILIDADE



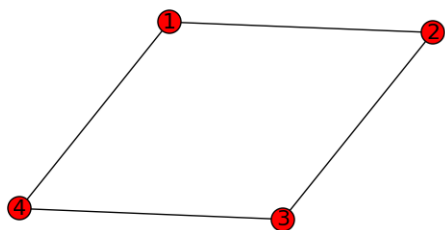
$O(0)$



TESTE CONTRATIBILIDADE



$O(0)$



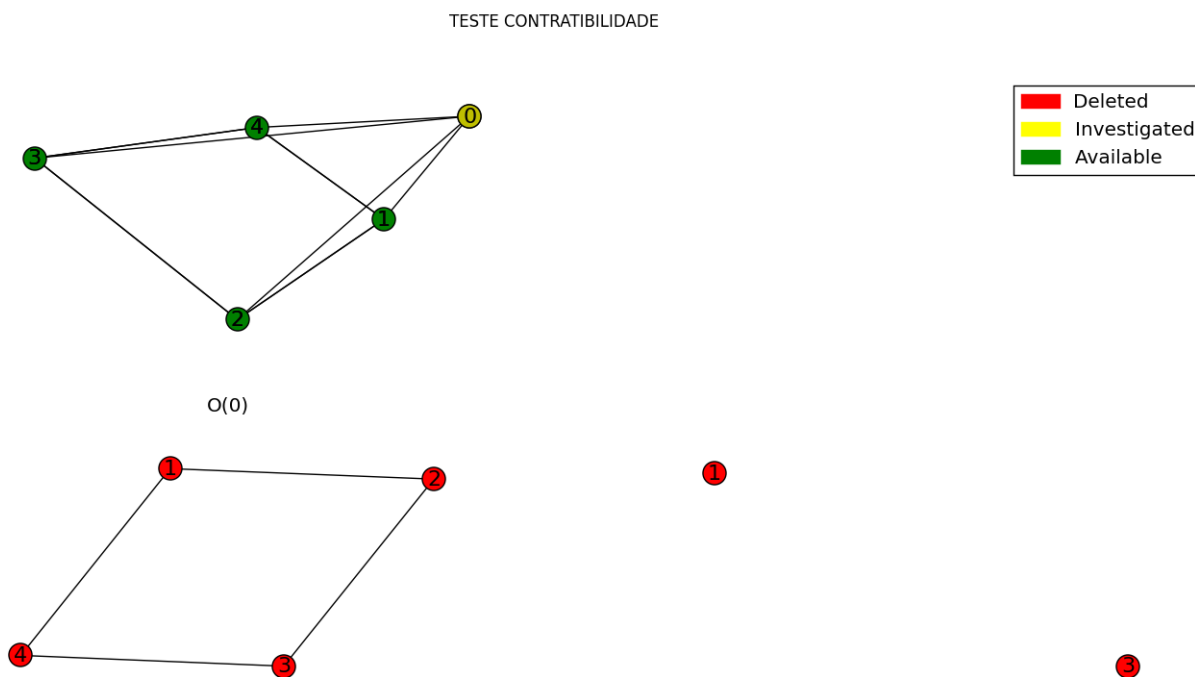
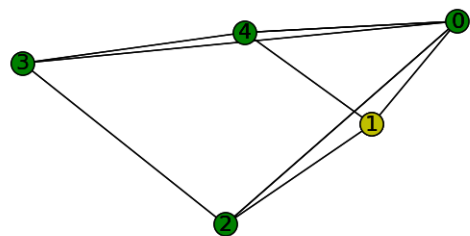


Figura 8 – Investigação em $v(0)$

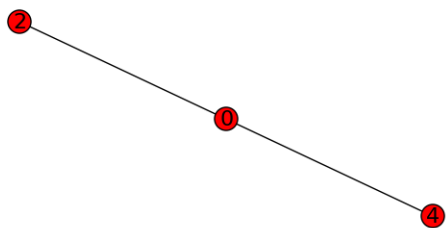
Vemos que, a análise começou $v(0)$. Nessa sequência, não foi possível chegar a um subgrafo contendo um vértice apenas. Podemos concluir que o vértice não é simples e assim sendo, não poderá ser removido.

TESTE CONTRATIBILIDADE

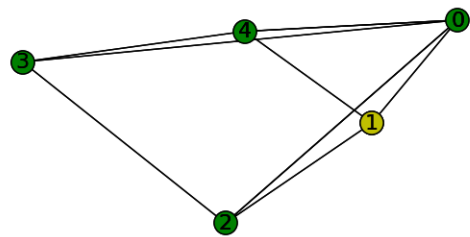


Red square	Deleted
Yellow square	Investigated
Green square	Available

O(1)



TESTE CONTRATIBILIDADE

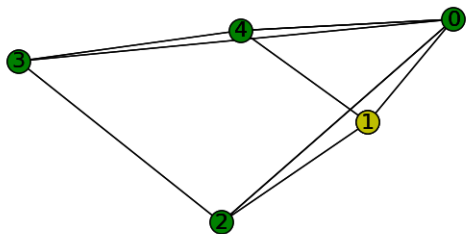


Red square	Deleted
Yellow square	Investigated
Green square	Available

O(1)

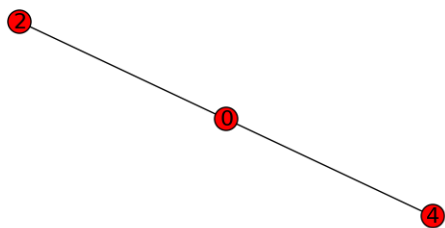


TESTE CONTRATIBILIDADE

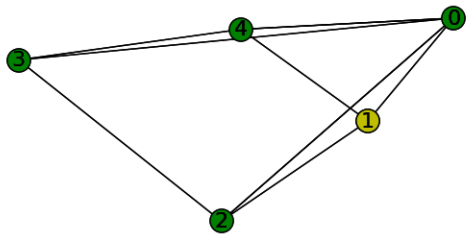


O(1)

	Deleted
	Investigated
	Available

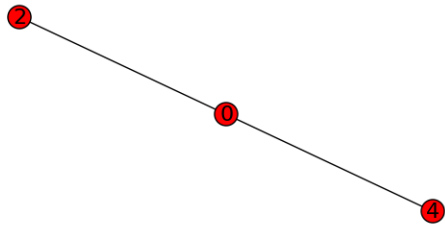


TESTE CONTRATIBILIDADE



O(1)

	Deleted
	Investigated
	Available



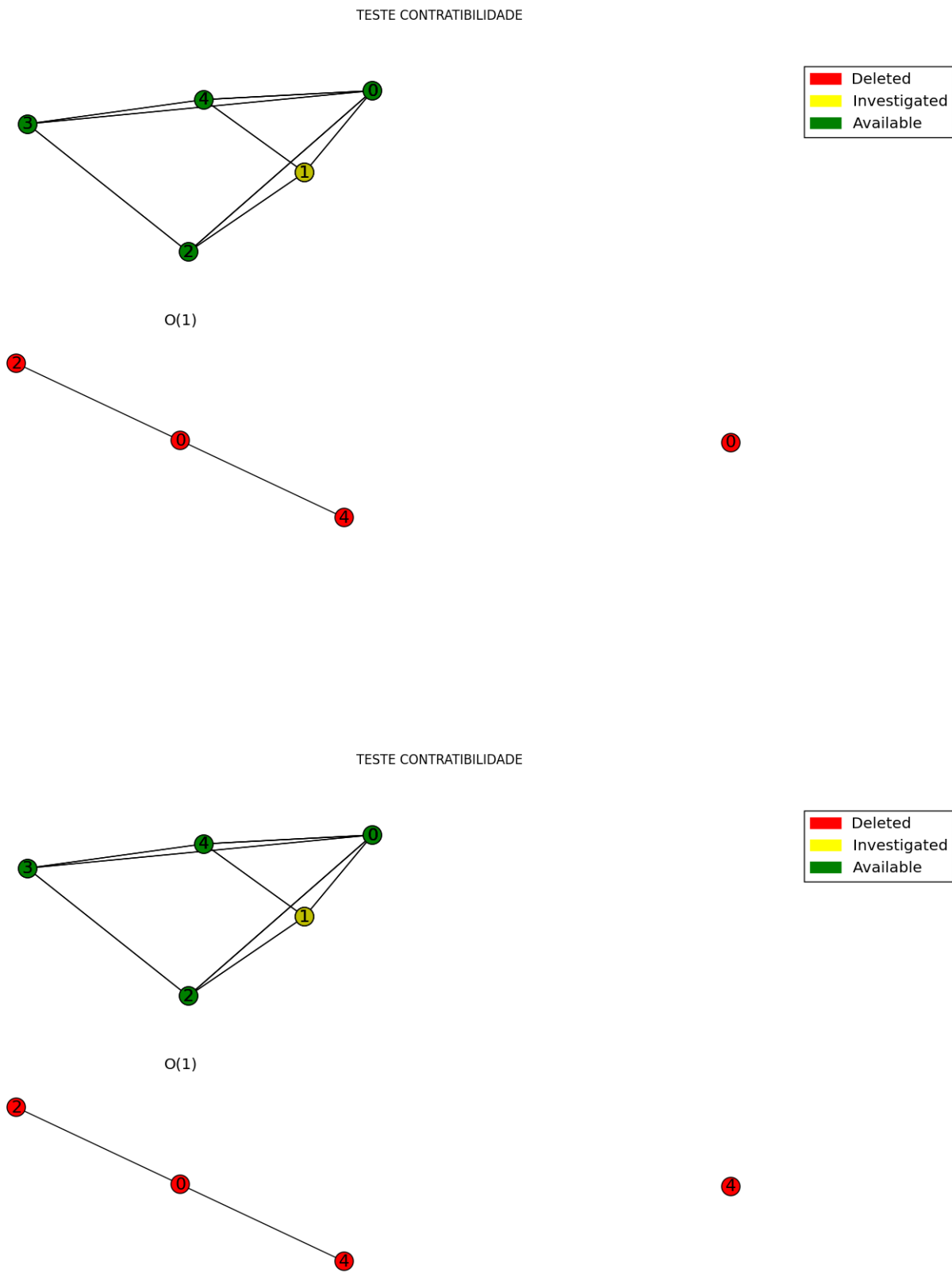
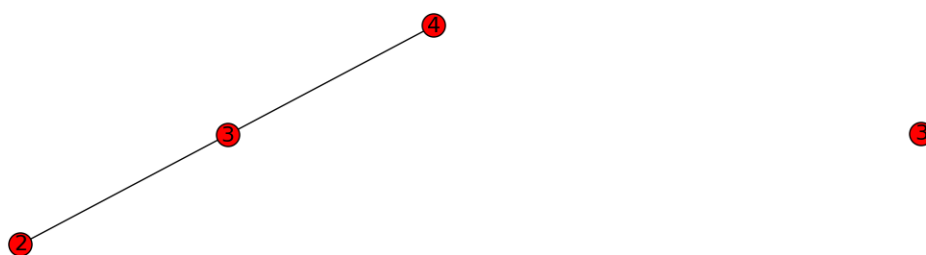
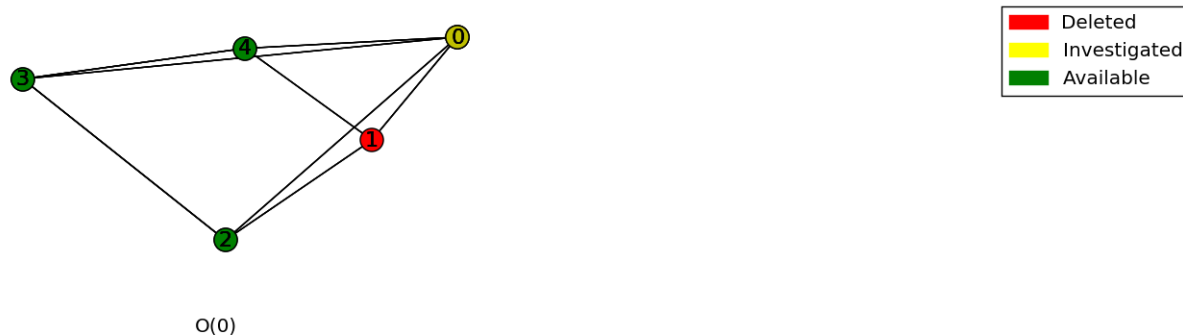


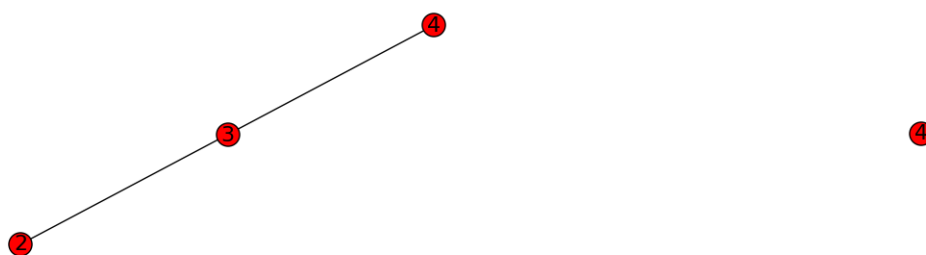
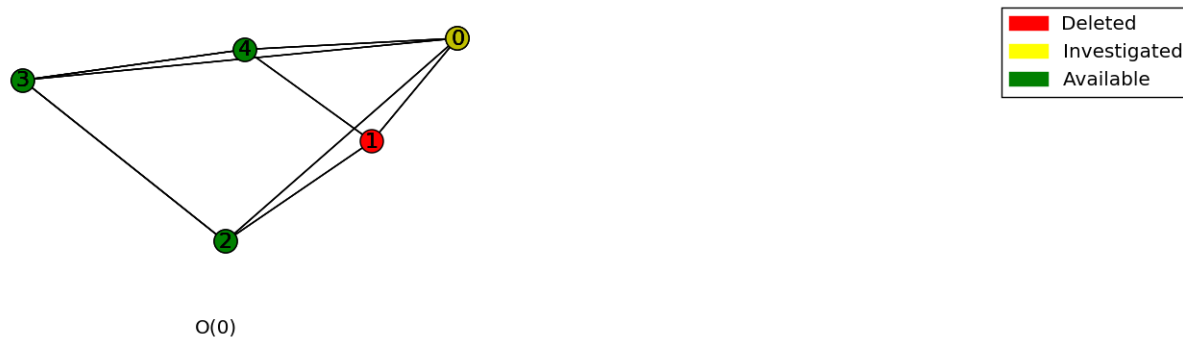
Figura 8 – Investigação em $v(1)$

O algoritmo, retoma a sua análise sem fazer remoções e passa para o vértice seguinte. Desse vértice, vemos que é possível encontrar um caminho, no qual o sub-grafo resultante é um vértice com um ponto apenas. Podemos concluir que o vértice é simples e portanto poderá ser removido.

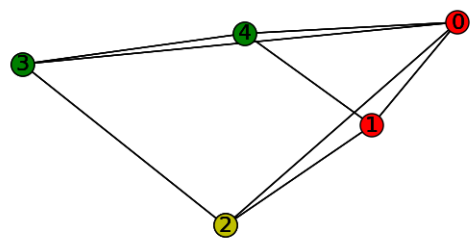
TESTE CONTRATIBILIDADE



TESTE CONTRATIBILIDADE



TESTE CONTRATIBILIDADE

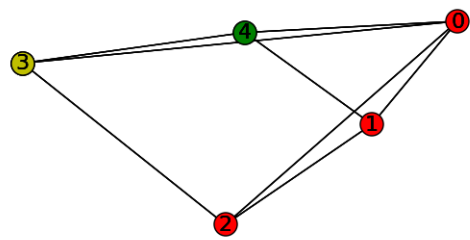


	Deleted
	Investigated
	Available

O(2)



TESTE CONTRATIBILIDADE



	Deleted
	Investigated
	Available

O(3)



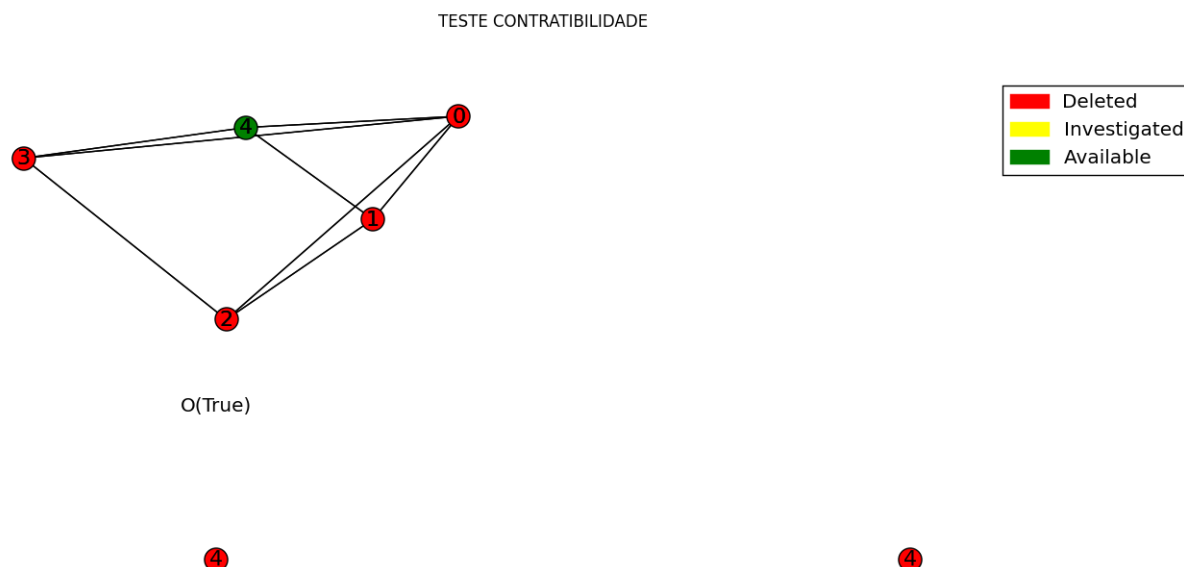


Figura 8 – Investigação nos demais vértices

Efetuada a remoção do vértice 1, o algoritmo volta a testar o nó anterior. Dessa vez, esse nó é considerado simples. As remoções continuam até que não restem mais vértices na estrutura. O algoritmo, retorna verdadeiro para a contratibilidade do grafo. Vemos ainda que, é possível construir, a partir dos vértices que vão sendo removidos, o que aqui chamamos de caminho contrátil. Para o exemplo, o caminho contrátil obtido é a sequência de vértices $[1, 0, 2, 3, 4, 5]$.

Faz interessante lembrar ao leitor, que essa operação é essencial para determinar se uma estrutura faz ou não parte do conjunto das n -variedades digitais. Além disso, é importante ainda levar em consideração a natureza recursiva do algoritmo. Visto que, todos esses passos são aplicados não apenas a estrutura principal em análise, mas como também aos subgrafos que vão sendo gerados. Implicando em um custo computacional significativo.

8.1.3 R -Transformação

Vamos agora analisar o resultado obtido do método que troca um vértice por uma aresta.

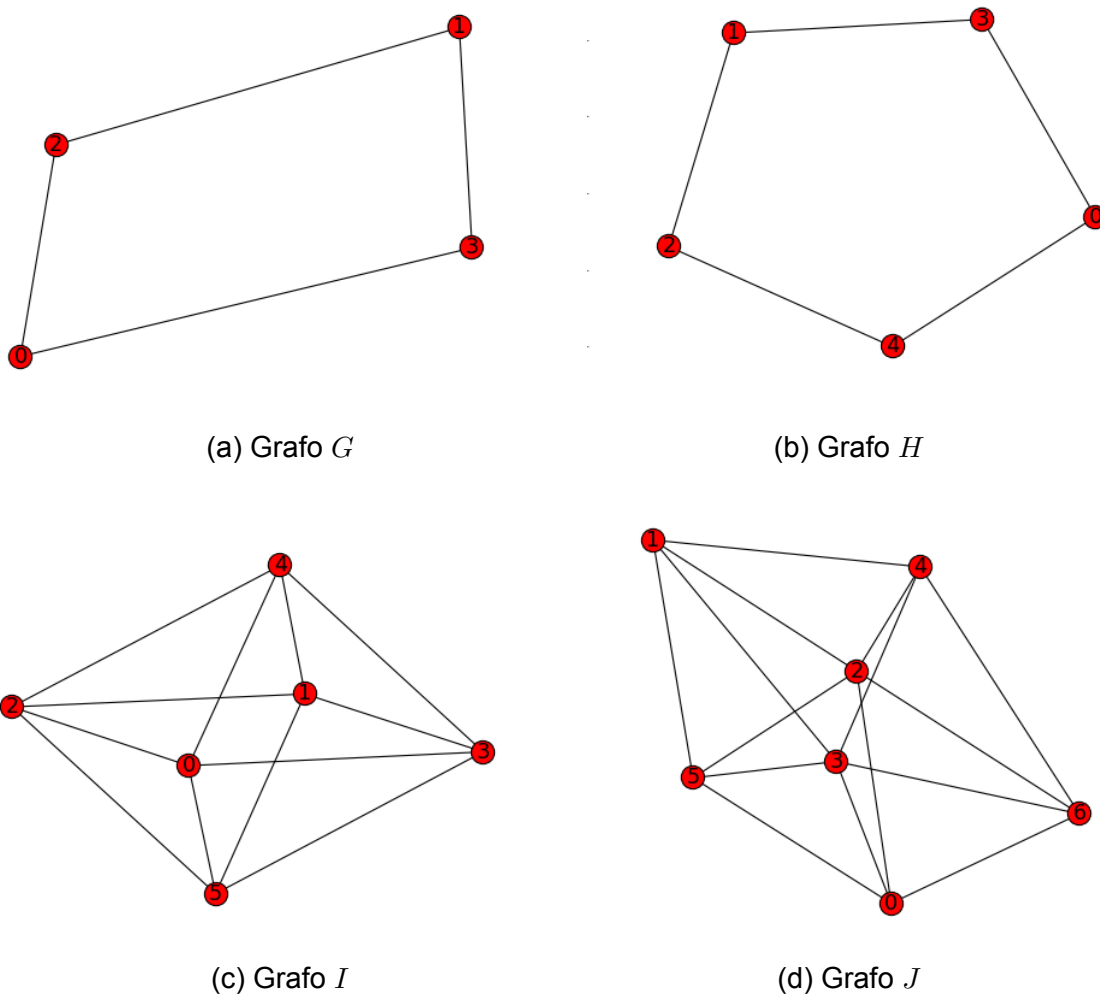
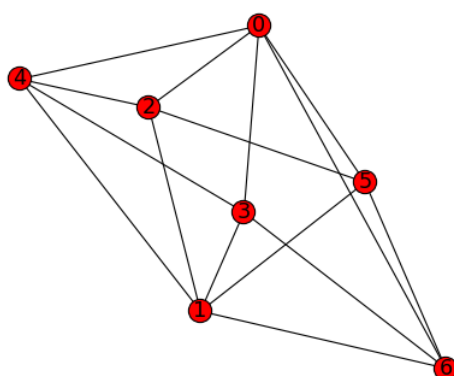


Figura 9 – Operações de R -Transformação. Grafo H é o resultado de uma R -Transformação no grafo G . Grafo J é o resultado de uma R -transformação no Grafo I

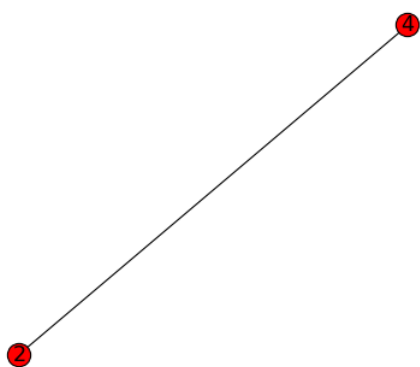
Como visto na Definição 8, o ponto a ser adicionado na estrutura, deverá ser adjacente à todos os pontos de $O(u) \cap O(v)$, sendo (u, v) a aresta que será trocada na operação.

8.1.4 Compressão

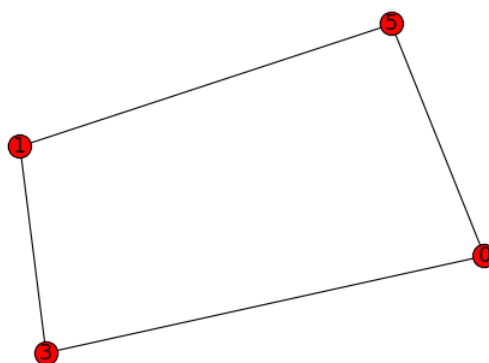
De acordo com a Definição 9, esta operação substitui todos os pontos do interior de um grafo por um ponto adjacente à todos os pontos da fronteira. Diferente da R -transformação, a compressão é realizada em um nó, da estrutura. A sequência de imagens abaixo, são o resultado da implementação dessa operação.



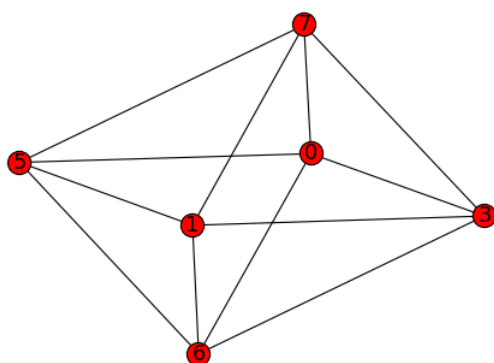
(a) Grafo G à ser comprimido



(b) ∂G obtido de $O(1)$



(c) Int obtido de $O(1)$



(d) Resultado Compressão

Figura 10 – Compressão

Na figura 10-a, temos o grafo que será comprimido. No exemplo acima, a compressão ocorreu a partir do vértice 6. Em 10-b e 10-c temos o interior e região de fronteira do grafo, respectivamente. Como resultado, temos em 10-d, o grafo em sua versão comprimida. Os pontos 4 e 2, foram substituídos pelo vértice 7, ligado à todos

os pontos da fronteira.

8.1.5 Discretização de Objetos Digitais

Esse método se propõe a analisar o modelo representativo de superfícies e objetos contínuos proposto por Evako (2014). Possui como entrada uma imagem e o resultado do algoritmo é um grafo representativo dessa figura. Esse grafo é construído a partir da análise do contorno do objeto a ser investigado. Visto que o exercício tem por objetivo analisar o modelo teórico e não técnicas avançadas de processamento de imagens, o fundo preto e bordas de cores contrastantes na figura, foram cenários criados intencionalmente para facilitar o reconhecimento de contornos da figura. A seguir, vamos analisar as entradas do algoritmo e o resultado obtido após o processamento.

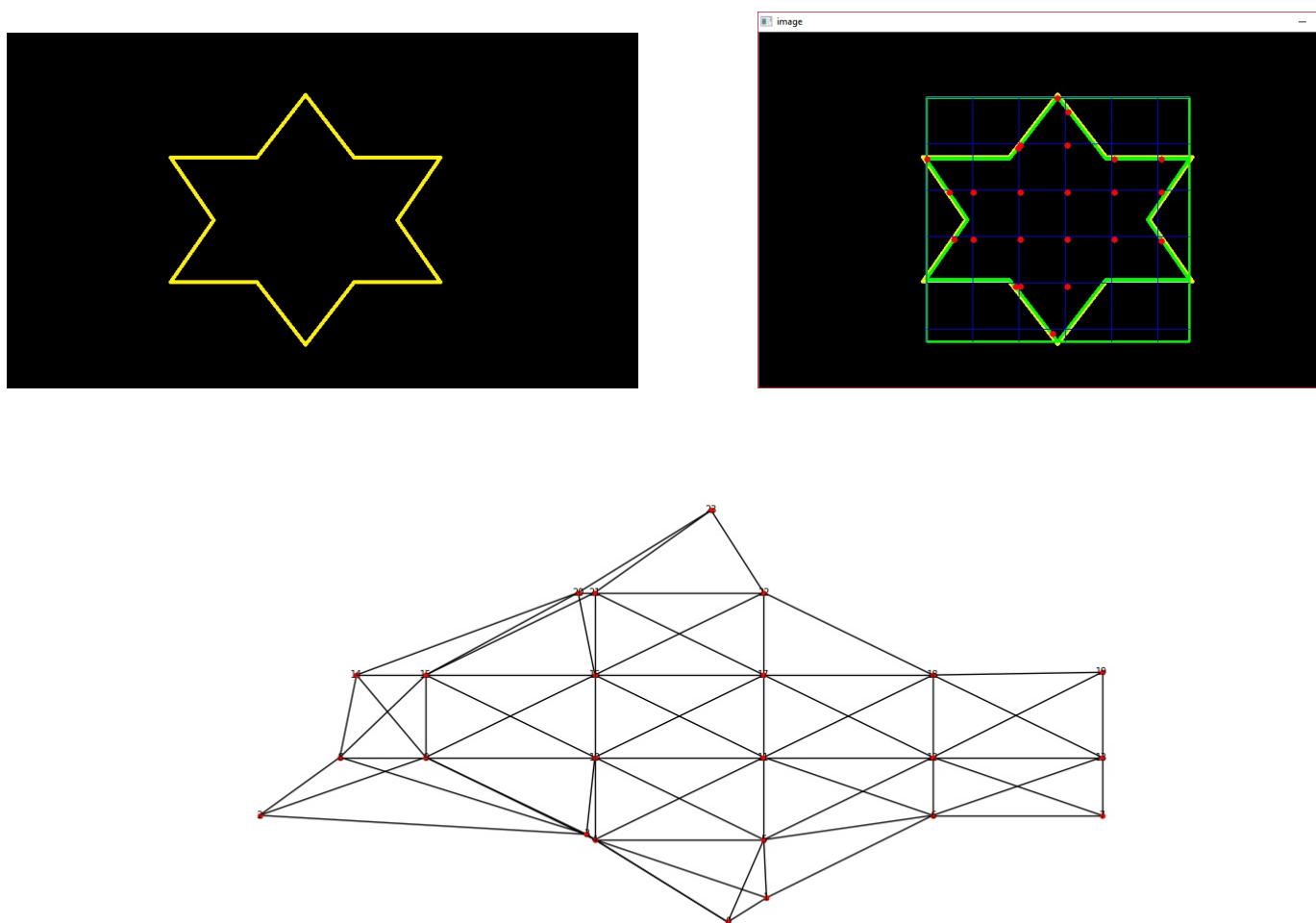


Figura 11 – Ilustrações do processo de extração de grafos de uma imagem. Abaixo, temos o grafo resultante desse procedimento.

As duas primeira imagens, são respectivamente a figura a ser analisada e a in-

terpolação do contorno do objeto em um plano, representando a construção do modelo cúbico trazido por Evako(2014). A análise proposta pelo algoritmo, considera todos os pixels que se encontram no interior da curva e as regiões de intersecção. O grafo acima representa o disco dessa n -variedade digital.

A proposta de discretização de imagens do autor, considera as regiões que intersectam o plano. O algoritmo verifica pixel à pixel e atribui um vértice à cada região onde o contorno da figura intersecta o plano. O grafo resultante, obtido à parti das adjacências é visto à seguir.

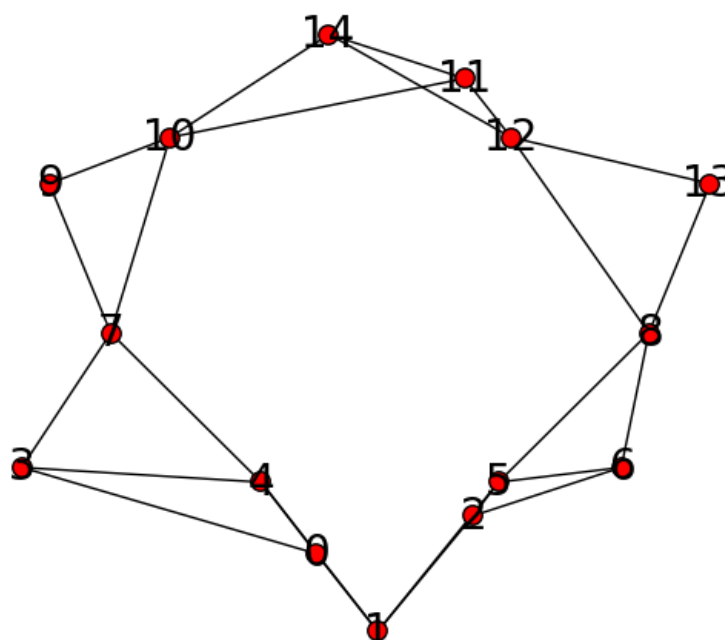


Figura 12 – Grafo de adjacências

Eliminando-se todos os pontos simples desse grafo, obtemos uma 1–esfera minimal.

8.1.6 Software Graph Manifold

Nesta sessão estão listadas o código das principais implementações realizadas e discutidas neste estudo. Cada uma dessas implementações recebe o objeto gerado

pela biblioteca Networkx utilizada em python. As variáveis 'display' são utilizadas para a visualização do resultado. Abaixo temos a operação soma. Recebe dois grafos, e retorna o resultado.

```
def sumGraph(Graph1, Graph2, display):
    global size
    size = len(Graph1.nodes()) - 1
    graph = Graph1.copy()
    Graph2 = renameNodes(Graph2)
    graph.add_edges_from(Graph2.edges())
    for i in Graph1.nodes_iter(data = False):
        for j in Graph2.nodes_iter(data = False):
            graph.add_edge(i, j)
    blue = Graph1.nodes()
    yellow = Graph2.nodes()
    if (display == True):
        get_sum(graph, blue, yellow)
        plt.waitforbuttonpress()
        plt.close()
    size = 0
    return graph
```

A sequência de métodos abaixo, são as operações que identificam a vizinhança, bola, disco, fronteira e interior de um grafo. Estão agrupadas, por serem operações básicas utilizadas para as demais verificações.

```
def get_rim(graph, vertice, display):
    ov = nx.subgraph(graph, graph.neighbors(vertice))
    if (display):
        GUI.display_graph(ov)
    return ov
```

```
def get_ball(graph, vertice, display):
    ov = graph.neighbors(vertice)
    ov.append(vertice)
    ball = nx.subgraph(graph, ov)
    if (display):
        GUI.display_graph(ball)
    return ball
```

```

def get_disc(graph, vertice, display):

    disc = graph.nodes()
    disc.remove(vertice)

    disc = nx.subgraph(graph, disc)
    if (display):
        GUI.display_graph(disc)
    return disc

def get_front (graph, vertice, display):
    D = get_disc(graph, vertice, False)
    I = get_int(graph, vertice, False)
    F= []
    for i in D.nodes():
        if i not in I.nodes():
            F.append(i)
    front = nx.subgraph(graph, F)
    return front

def get_int(graph, vertice, display):
    disc = get_disc(graph, vertice, False)
    ov = get_rim(graph, vertice, False)

    for i in ov:
        if i in disc:
            disc.remove_node(i)

    interior = disc
    if (display):
        GUI.display_graph(interior)
    return interior

```

O método que checa a contratibilidade de um grafo está listado abaixo. Ele recebe um grafo e checa os subgrafos induzidos de cada nó da estrutura na operação *isNodeSimple()*. Essa forma de estruturação foi escolhida para facilitar guardar o caminho percorrido pelo algoritmo.

```

def isContractible (graph):

```

```

if (len(graph.nodes())==1):
    graph_list.append([graph, True])
    return True
else:
    for node in graph.nodes_iter(data=False):
        ov = graph.subgraph(graph.neighbors(node))
        graph_list.append([ov.copy(), node])
        if isNodeSimple(ov) == True:
            graph.remove_node(node)
            subgraph_list.append(["X"])
            return isContractible(graph)
        subgraph_list.append(["X"])
    graph_list.append([graph, False])
    return False

def isNodeSimple(ov):
    subgraph_list.append([ov.copy()])
    if len(ov.nodes()) == 1:
        subgraph_list.append([True])
        return True
    else:
        for node in ov.nodes_iter(data=False):
            ov_path.append([node])
            ov2 = ov.subgraph(ov.neighbors(node))

            if isNodeSimple(ov2) == True:
                ov.remove_node(node)
                return isNodeSimple(ov)
            subgraph_list.append([False])

        return False

```

O método seguinte é o responsável por verificar se a estrutura é uma n -esfera. Retorna verdadeiro ou falso, e a complexidade do grafo, caso este seja uma esfera.

```

def isSphere(graph):
    global path_sphere
    global path_ov

```

```

if (len(graph.nodes()) < 2 ):
    path_sphere.append(path_ov)
    path_ov = []
    return False

elif (len(graph.nodes())==2 and nx.is_connected(graph) == False):
    path_sphere.append(path_ov)
    path_ov = []

    return True
else:
    for node in graph.nodes_iter(data=False):
        ov = nx.subgraph(graph, graph.neighbors(node))
        disc = get_disc(graph, node, False)
        path_ov.append([node, ov])
        if ( testContractible(disc, False)==False or isSphere(ov) ==
            path_sphere.append(path_ov)
            path_ov = []
            #print "Graph is not Sphere"
            return False
    return True

```

O método seguinte, verifica se a estrutura é uma variedade. Perceba que já usamos vários dos métodos implementados anteriormente nesta operação.

```

def n_Manifold(graph):
    global path_sphere
    test_node = 0
    for node in graph.nodes():
        rim = get_rim(graph, node, False)
        test_node = testSphere(rim, False)
        disc = get_disc(graph, node, False)
        if (test_node[0] ==False or isContractible(disc) == False):
            return False
    return True, str((test_node[1]) + 1) + '-Manifold'

```

Por fim, as operações de r-transformação e compressão estão listadas a seguir. Na primeira, o método recebe como valores de entrada, um grafo, o novo vértice e os nós que representam a aresta.

```

def r_Transformation(graph, newVertice, o, v):
    ##nVariety(graph)==True and

```

```
if ( o in graph.neighbors(v)):  
    graph.remove_edge(o,v)  
    graph.add_edge(newVertice ,o)  
    graph.add_edge(newVertice ,v)  
    for i in sorted(nx.common_neighbors(graph ,o ,v )):  
        if i != newVertice :  
            graph.add_edge(newVertice , i )  
return graph
```

O método de compressão, recebe um grafo, e os subgrafos que representam o interior e a região de fronteira respectivamente.

```
def compress_manifold(graph , interior , front ):  
    new_graph = graph.copy()  
    new_node = max(graph.nodes())+1  
    for node in interior :  
        new_graph.remove_node(node)  
    for node in front :  
        new_graph.add_edge(node , new_node)  
    return new_graph
```


9 Considerações Finais

Neste trabalho foram abordados conceitos referentes a Teoria das Variedades Digitais. No decorrer deste estudo, foi possível introduzir algumas das principais noções da área. Entre elas, a contratibilidade de grafos, operações de R -transformação e compressão, por fim foi apresentado a implementação de um método para a discretização de imagens. As principais definições foram implementadas em linguagem de programação a fim de relacionar o estudo com a computação.

Espera-se que este trabalho, possa motivar estudos posteriores. As imagens obtidas das implementações, demonstram que o conceito de variedades digitais pode vir à se tornar uma ferramenta poderosa de análise a ser aplicadas em objetos de pesquisa da vida real, ressonâncias, tomografias etc. Como citados por Evako(2016) em seus trabalhos.

As implementações realizadas serviram como método auxiliar no entendimento e visualização da definições teóricas. Dado a natureza recursiva dos algoritmos, a complexidade das estruturas podem interferir no desempenho das implementações. Em caso de análises mais complexas será necessário rever métodos e recursos envolvidos.

Referências

CHEN, B.; YAU, S.-T.; YEH, Y.-N. Graph homotopy and graham homotopy. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 241, n. 1-3, p. 153–170, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 22.

EVAKO, A. V. The consistency principle for a digitization procedure. an algorithm for building normal digital spaces of continuous n-dimensional objects. *arXiv preprint cs/0511064*, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 25.

EVAKO, A. V. Characterizations of simple points, simple edges and simple cliques of digital spaces: One method of topology-preserving transformations of digital spaces by deleting simple points and edges. *Graphical Models*, Elsevier, v. 73, n. 1, p. 1–9, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 10, 18, 21 e 25.

EVAKO, A. V. Topology preserving discretization schemes for digital image segmentation and digital models of the plane. *Open Access Library Journal*, v. 1, p. e566, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 10, 18, 21 e 25.

EVAKO, A. V. Classification of digital n-manifolds. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 181, p. 289–296, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 10, 12, 13, 16, 18, 21, 23 e 25.

IVASHCHENKO, A. V. Contractible transformations do not change the homology groups of graphs. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 126, n. 1-3, p. 159–170, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 10, 11 e 12.

IVASHCHENKO, A. V. Some properties of contractible transformations on graphs. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 133, n. 1, p. 139–145, 1994. Citado 5 vezes nas páginas 10, 11, 12, 13 e 18.

IVASHCHENKO, A. V.; YEH, Y.-N. Minimal graphs of a torus, a projective plane and spheres and some properties of minimal graphs of homotopy classes. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 126, n. 1-3, p. 171–178, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 18.

KNILL, O. Classical mathematical structures within topological graph theory. *arXiv preprint arXiv:1402.2029*, 2014. Citado na página 22.

KNILL, O. A notion of graph homeomorphism. *arXiv preprint arXiv:1401.2819*, 2014. Citado na página 22.

KOMURAVELLI, A.; SINHA, A.; BISHNU, A. Connectivity preserving transformations for higher dimensional binary images. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 157, n. 16, p. 3372–3385, 2009. Citado na página 12.

LEE, J. M. *Introduction to Topological Manifolds*. 2. ed. Springer-Verlag New York, 2011. (Graduate Texts in Mathematics 202). ISBN 978-1-4419-7939-1, 978-1-4419-7940-7. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=fac03a620ff0cb69eb1f5a4e255ddd38>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 18.

- LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2. ed. Springer-Verlag New York, 2012. (Graduate Texts in Mathematics 218). ISBN 1441999817,9781441999818,1441999825,9781441999825. Disponível em: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=00d8d81edf732351d00bf90d16231216>. Citado na página 12.
- POSTON, T. *Fuzzy geometry*. Tese (Doutorado) — University of Warwick, 1971. Citado na página 22.
- SMYTH, M. B.; TSAUR, R.; STEWART, I. Topological graph dimension. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 310, n. 2, p. 325–329, 2010. Citado na página 22.
- SMYTH, M. B.; WEBSTER, J. Discrete spatial models. In: *Handbook of spatial logics*. [S.l.]: Springer, 2007. p. 713–798. Citado na página 10.
- TSAUR, R.; SMYTH, M. B. Contractible digraphs. In: *Proceedings of the 30th Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory, National Dong Hwa University, Hualien, Taiwan*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 156–159. Citado na página 22.